14 Propriétés de Thalès

CAPACITÉS

À la fin de ce chapitre, je vais savoir…

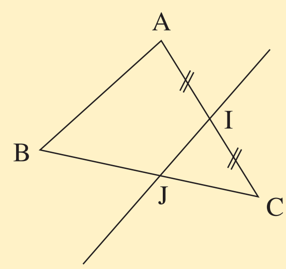
1. Utiliser le théorème de Thalès pour calculer des longueurs
2. Déterminer par le calcul si deux droites sont parallèles
3. Agrandir ou réduire une figure à l'aide des propriétés de Thalès
4. Utiliser l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur l'aire d'une surface

Avant de démarrer

CHOISIR LA BONNE RÉPONSE

A Droite des milieux

Dans la figure ci-contre, on donne $BC = 5$ cm .



1. On est sûr que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles quand :

a. IJ = 2,5 cm **b.** CJ = 2,5 cm **c.** AB = 2,5 cm

2. Si les droites (IJ) et (AB) sont parallèles, on est sûr que :

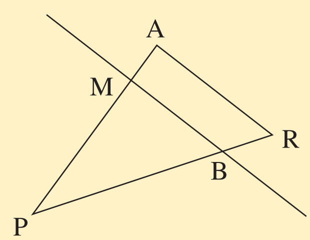
a. CJ = 2,5 cm **b.** IJ = 2,5 cm **c.** AB = 2,5 cm

3. Si les droites (IJ) et (AB) sont parallèles et si $AB = 4,4$ cm , alors on est sûr que :

a. CI = 2,2 cm **b.** IJ = 8,8 cm **c.** IJ = 2,2 cm

B Proportionnalité

1. Dans la figure ci-contre, les droites (AR) et (MB) sont parallèles. On sait alors que :



a. $\dfrac{AM}{AP} = \dfrac{RB}{RP} = \dfrac{MB}{AR}$ **b.** $\dfrac{PM}{PA} = \dfrac{PR}{PB} = \dfrac{MB}{AR}$

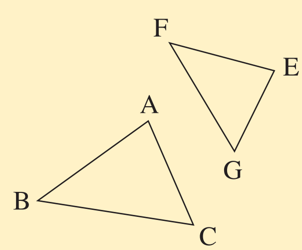
c. $\dfrac{PM}{PA} = \dfrac{PB}{PR} = \dfrac{MB}{AR}$

2. Si $\dfrac{3,5}{2} = \dfrac{2,1}{AR}$, alors AR est égal à :

a. 1,2 **b.** 1,4 **c.** 1,8

C Agrandissement, réduction

Dans la figure ci-contre, EFG est une réduction à l'échelle 0,8 du triangle ABC.



a. Si $BC = 5$ cm , alors $FG = 4,2$ cm

b. On est sûr que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{FGE}$ sont égaux

c. ABC est un agrandissement de facteur 1,25 de EFG

Ouverture sur…

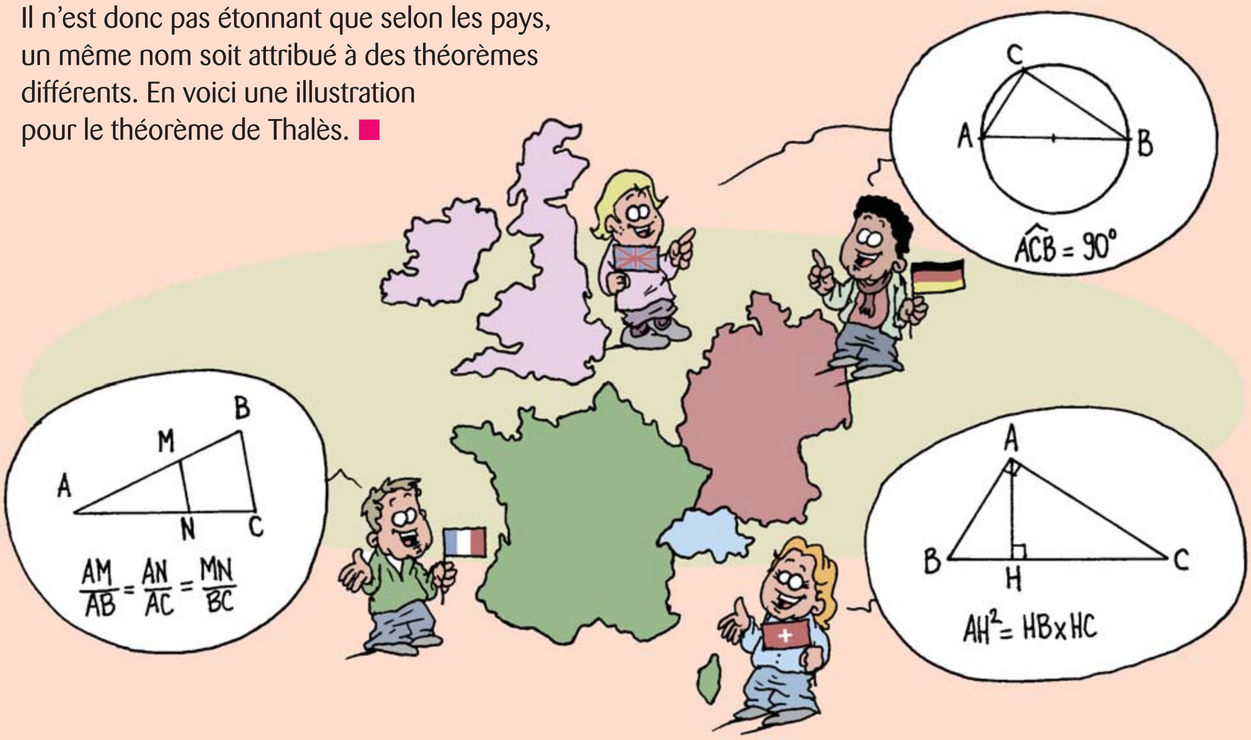
Le nom d'un théorème

Thalès a donné son nom à un célèbre théorème… mais est-on sûr qu'il en soit vraiment l'auteur ?

À la fin du XIX^{e} siècle, les enseignants ont pris l'habitude d'associer certains théorèmes à des mathématiciens célèbres. Parmi ceux-ci, **Thalès de Milet**, qui vécut au VI^{e} siècle avant notre ère, est souvent considéré comme l'un des fondateurs des mathématiques grecques. Selon la légende, Thalès parvint à calculer la hauteur des pyramides en utilisant la longueur des ombres grâce au théorème qui porte son nom. Pourtant, aucun texte ancien ne permet de lui attribuer la paternité de ce principe de calcul. Dans le papyrus de Rhind, il existe même une version de « son » théorème bien antérieure à son époque.

Le papyrus de Rhind aurait été recopié vers 1650 avant J.-C. par le scribe Ahmès. Il doit son nom à l'Écossais Henry Rhind qui l'acheta en 1858 à Louxor.

Il n'est donc pas étonnant que selon les pays, un même nom soit attribué à des théorèmes différents. En voici une illustration pour le théorème de Thalès. ■



Dans quelle situation utilise-t-on le théorème associé en France à Thalès ?

Activités

1 Théorème de Thalès

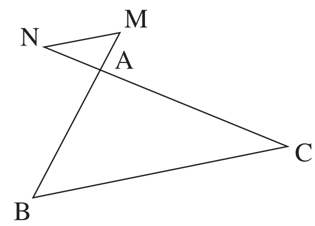
Spécial prof
Objectif : prolonger à la configuration croisée les résultats étudiés en 4^{e}.

Cette activité, réalisable sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie, est proposée sur site.

Pour visualiser la manipulation de la partie 2, on peut faire découper le triangle AMN et le faire replacer sur ABC.

1. On constate

a. Construire sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie une figure comme celle ci-contre dans laquelle les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



b. À l'aide de mesures, puis de calculs, comparer les quotients $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$.

2. On démontre

*On utilise dans cette partie la figure obtenue dans la partie **1**.*

a. Tracer les points M' et N' symétriques respectifs des points M et N par rapport au point A.
b. Expliquer pourquoi les droites (M'N') et (BC) sont parallèles.
c. Quelles égalités de quotients peut-on en déduire ?
d. Démontrer le résultat constaté dans la partie **1**.

2 Réciproque du théorème de Thalès

Spécial prof
Objectif : conjecturer le parallélisme à partir d'égalités de quotients.

Cette activité, réalisable sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie, est proposée sur site.

1. a. Construire sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie un triangle ABC tel que $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm et $BC = 8$ cm.

b. Placer un point M sur la droite (AB) et un point N sur la droite (AC) tels que :
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = 0{,}7$.

c. Expliquer, à l'aide de figures, pourquoi il y a quatre situations possibles pour disposer les points M et N.

2. a. Dans combien des quatre situations repérées à la question **1c** les points A, B et M d'une part, et les points A, C et N d'autre part, sont-ils situés dans le même ordre ?

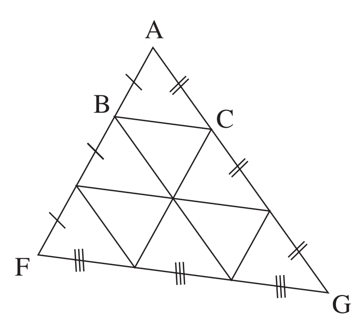
b. Que constate-t-on alors pour les droites (MN) et (BC) ?

3 Aire et agrandissement

Spécial prof
Objectif : conjecturer sur un exemple l'effet sur l'aire d'un agrandissement.

Cette activité et une démonstration sont proposées sur site.
On pourra signaler aux élèves que cette activité peut être adaptée pour le cas d'une réduction, par exemple en inversant le rôle des deux triangles.

1. a. D'après le codage de la figure, que peut-on dire des droites (BC) et (FG) ?
b. Quel facteur permet de passer des dimensions du triangle ABC à celles du triangle AFG ?
c. Que représente alors le triangle AFG pour le triangle ABC ?



2. D'après le découpage suggéré par la figure, quel facteur permet de passer de l'aire du triangle ABC à celle du triangle AFG ?

Cours

1 Théorème de Thalès

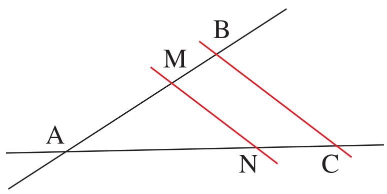
Spécial prof
On pourra attirer l'attention des élèves sur le fait qu'il s'agit d'une généralisation des théorèmes de la droite des milieux.

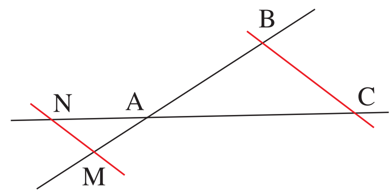
Théorème

Soit (CN) et (BM) deux droites sécantes en A. Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

Exemples :

Données : (MN) // (BC)





Info
On appelle ces situations des « configurations de Thalès ».

Conclusion : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

Remarque :
Dans les deux configurations, si (MN) et (BC) sont parallèles, le triangle AMN est une réduction (ou un agrandissement) du triangle ABC dans le rapport $k = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

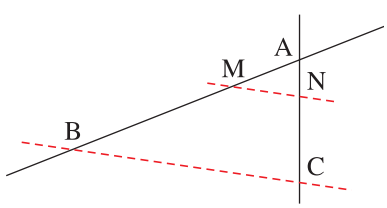
2 Réciproque du théorème de Thalès

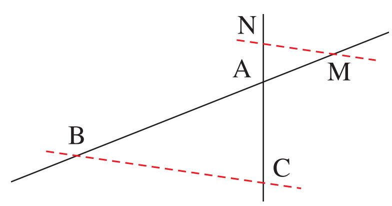
Réciproque

Si d'une part les points A, B et M, et d'autre part les points A, C et N sont alignés dans le même ordre, et si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, alors les droites (MN) et (CB) sont parallèles.

Exemples :

Données : A, B, M et A, C, N sont alignés dans le même ordre et $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.





Conclusion : (MN) // (BC)

3 Agrandissement ou réduction

Spécial prof
On pourra signaler aux élèves que les expressions agrandissement ou réduction de rapport *k*, de facteur *k* ou encore de coefficient *k* sont synonymes.

Propriété

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, l'aire d'une surface est multipliée par k^2.

Exemple :
Si on agrandit une figure dans le rapport 3, son aire est multipliée par $3^2 = 9$.

Exercices

je découvre, j'utilise

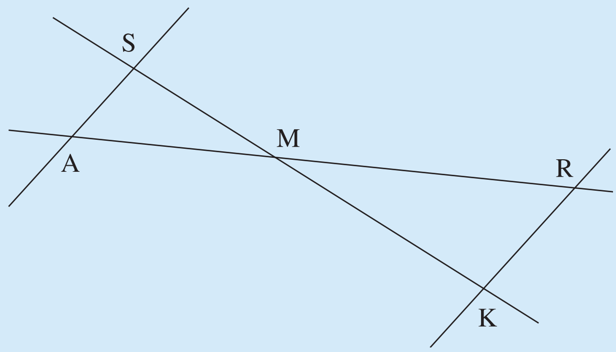
Capacité 1

Utiliser le théorème de Thalès pour calculer des longueurs

Énoncé

Dans la figure ci-contre,
les droites (SA) et (RK) sont parallèles.
$MA = 7{,}2$ cm , $MR = 10{,}8$ cm ,
$MS = 6$ cm et $RK = 5{,}1$ cm .

Calculer MK et AS.



Solution

Comme les droites (SA) et (RK) sont parallèles,
les triangles MSA et MKR sont dans une configuration de Thalès.
D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{MA}{MR} = \frac{MS}{MK} = \frac{AS}{RK} \text{, d'où } \frac{7{,}2}{10{,}8} = \frac{6}{MK} = \frac{AS}{5{,}1}.$$

L'égalité $\frac{7{,}2}{10{,}8} = \frac{6}{MK}$ donne $7{,}2 \times MK = 10{,}8 \times 6$

donc $MK = \frac{10{,}8 \times 6}{7{,}2} = 9$ donc $MK = 9$ cm .

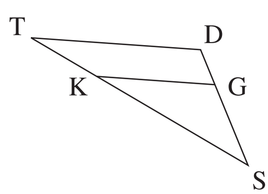
L'égalité $\frac{7{,}2}{10{,}8} = \frac{AS}{5{,}1}$ donne $10{,}8 \times AS = 7{,}2 \times 5{,}1$

donc $AS = \frac{7{,}2 \times 5{,}1}{10{,}8} = 3{,}4$ donc $AS = 3{,}4$ cm .

Commentaires

- On a choisi d'écrire : $\frac{\text{côtés de MAS}}{\text{côtés de MRK}}$
- On utilise les produits en croix.

1 Dans la figure ci-dessous, (DT) et (GK) sont parallèles,
$DT = 5{,}6$ cm ,
$GK = 4$ cm ,
$ST = 8{,}4$ cm ,
$SG = 3$ cm .
Calculer SK et SD.

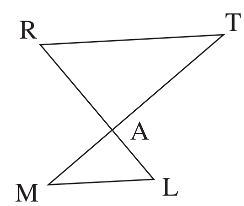


2 **1.** Construire un triangle EGF tel que :
$EF = 9$ cm , $EG = 7$ cm et $FG = 5$ cm .
Soit M le point de [EG] tel que $EM = 4$ cm .
Soit N le point de (GF) tel que (MN) // (EF) .

2. Calculer MN et GN (arrondir au mm).

3 Reprendre l'exercice précédent en plaçant M sur la demi-droite [GE) mais à l'extérieur du segment [EG].

4 Dans la figure dessous, (RT) et (ML) sont parallèles, $RT = 7$ cm , $AR = 4{,}2$ cm , $AL = 2{,}4$ cm et $AM = 3{,}2$ cm .



Calculer AT et ML.

5 **1.** Tracer deux droites (*d*) et (*d'*) sécantes en O. Placer sur (*d*), de part et d'autre de O, deux points A et B tels que $OA = 3$ cm et $OB = 5$ cm .
Placer sur (*d'*) un point M tel que $OM = 2{,}7$ cm et un point N tel que (AM) et (BN) soient parallèles.

2. Calculer ON.

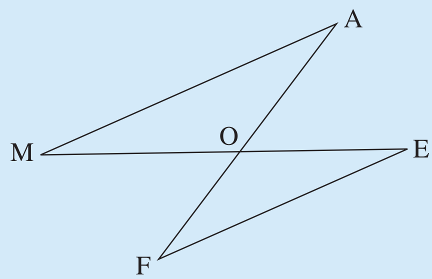
Déterminer par le calcul si deux droites sont parallèles

Énoncé

Les droites (MA) et (FE) ci-dessous sont-elles parallèles ? Et les droites (CR) et (BL) ?

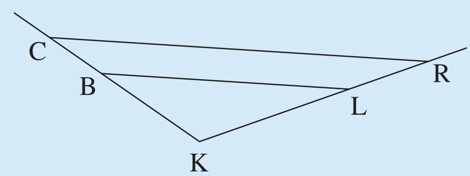
Données

$OF = 2{,}4$ cm , $OE = 3$ cm , $OM = 3{,}5$ cm et $OA = 2{,}8$ cm .



Données

$KB = 2{,}4$ cm , $KC = 8$ cm , $KL = 2{,}7$ cm et $KR = 8{,}9$ cm .



Solution

Droites (MA) et (FE)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{OE}{OM} = \dfrac{3}{3{,}5} \text{ et } \dfrac{OF}{OA} = \dfrac{2{,}4}{2{,}8} \\ 3 \times 2{,}8 = 8{,}4 \\ 3{,}5 \times 2{,}4 = 8{,}4\end{array}\right\} \text{donc } \dfrac{OE}{OM} = \dfrac{OF}{OA}$$

Comme de plus les points M, O et E d'une part et A, O et F d'autre part sont alignés dans le même ordre, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MA) et (FE) sont parallèles.

Droites (CR) et (BL)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{2{,}4}{8} \text{ et } \dfrac{KL}{KR} = \dfrac{2{,}7}{8{,}9} \\ 2{,}4 \times 8{,}9 = 21{,}36 \\ 8 \times 2{,}7 = 21{,}6\end{array}\right\} \text{donc } \dfrac{KB}{KC} \neq \dfrac{KL}{KR}$$

Si les droites (CR) et (BL) étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès, on aurait $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{KL}{KR}$, ce qui est faux.

Donc les droites (CR) et (BL) ne sont pas parallèles.

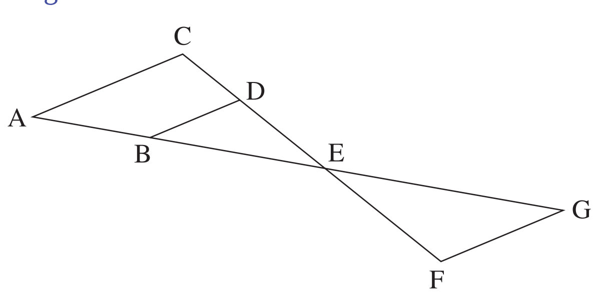
Commentaires

- On tente d'appliquer la réciproque du théorème de Thalès.
- Pour comparer les quotients, on peut comparer leurs produits en croix.
- Attention à ne pas conclure à l'égalité en comparant seulement des valeurs approchées.

- On tente d'appliquer la réciproque du théorème de Thalès.
Comme les quotients ne sont pas égaux, on ne peut pas appliquer la réciproque du théorème de Thalès.

- C'est le théorème de Thalès qui permet de conclure.

Pour les exercices **6** et **7**, on considère la figure suivante qui n'est pas dessinée en vraie grandeur. Les longueurs sont en cm.



6 Indiquer si $(BD) // (AC)$ lorsque :

a. $ED = 27$, $EB = 45$, $BD = 20$, $EC = 21$, $EA = 35$.

b. $ED = 14$, $EB = 18$, $AC = 30$, $EC = 20$, $EA = 24$.

7 Indiquer si $(BD) // (FG)$ lorsque :

a. $ED = 12$, $EB = 15$, $EF = 28$, $EG = 36$, $GF = 25$.

b. $ED = 22$, $EB = 30$, $BD = 20$, $EF = 26{,}4$, $EG = 36$.

Exercices

je découvre, j'utilise

Capacité 3

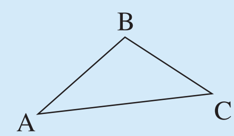
Agrandir ou réduire une figure en utilisant les propriétés de Thalès

Énoncé

Soit ABC un triangle.

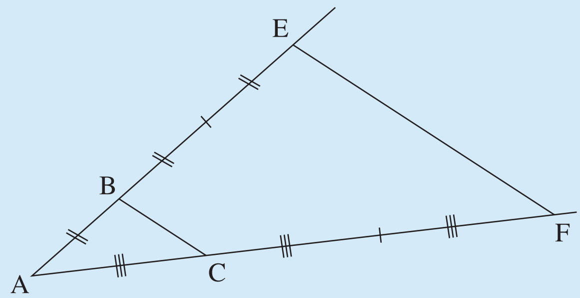
1. Construire un agrandissement de rapport 3 de ce triangle.

2. Justifier la construction.



Solution

1. On reporte trois fois la longueur des côtés [AB] et [AC] comme dans la figure ci-contre.



2. $\dfrac{AE}{AB} = 3$ et $\dfrac{AF}{AC} = 3$ donc $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$.

Comme de plus les points A, B et E d'une part et les points A, C et F d'autre part sont alignés dans le même ordre, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

On peut donc utiliser le théorème de Thalès et on obtient :

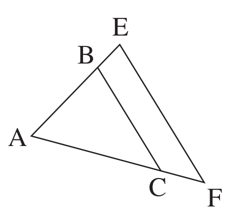
$\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$ (= 3).

AEF est donc bien un agrandissement de ABC dans le rapport 3.

Commentaires

On aurait aussi pu obtenir le point F à l'intersection de la droite (AC) et de la parallèle à (BC) menée par E.

8 **1.** Construire une figure comme celle ci-contre dans laquelle (BC) // (EF), AB = 3 cm et AE = 4 cm.



2. Prouver que le triangle AEF est un agrandissement du triangle ABC. Préciser le facteur.

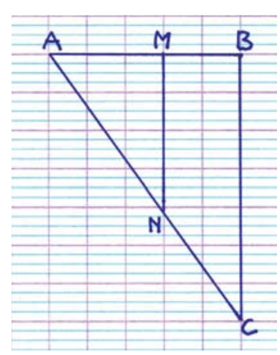
3. Sur la même figure, placer deux points M et N de telle sorte que le triangle AMN soit un agrandissement de ABC de rapport $\dfrac{5}{3}$.

9 **1.** Construire un triangle ABC tel que : AB = 6 cm, BC = 7 cm et AC = 4,5 cm.

2. Construire un triangle AMN qui soit une réduction de ABC dans le rapport $\dfrac{1}{3}$. Préciser les étapes de la construction.

3. Construire un triangle COQ qui soit un agrandissement de CAB dans le rapport $\dfrac{9}{7}$. Préciser les étapes de la construction.

10 **1.** En utilisant le quadrillage, Rémi a obtenu le triangle AMN qui est une réduction du triangle ABC. Parmi les valeurs proposées, indiquer le facteur de cette réduction :



a. $\dfrac{1}{2}$ **b.** $\dfrac{2}{3}$ **c.** $\dfrac{3}{5}$ **d.** $\dfrac{5}{3}$

2. Reproduire sur quadrillage le triangle ABC et construire à la règle seule un triangle qui soit une réduction de rapport $\dfrac{4}{7}$ de ABC.

11 **1. a.** Construire un rectangle ABCD.

b. Construire, sans effectuer de mesures à la règle, et en laissant les traits de construction apparents, un agrandissement de rapport 2 de ce rectangle.

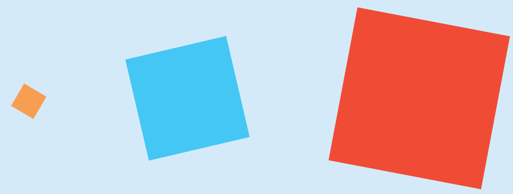
2. Sur une nouvelle figure, reprendre la question **1b** pour une réduction de rapport 0,5.

Capacité 4

Utiliser l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur l'aire d'une surface

Énoncé

On a représenté ci-contre un carré bleu dont l'aire réelle est $\mathscr{A}_b = 80 \text{ cm}^2$.
Le carré orange est une réduction de rapport $\frac{1}{4}$ du carré bleu et le carré rouge est un agrandissement de rapport $\frac{3}{2}$ du carré bleu.



Calculer :
a. l'aire $\mathscr{A}_o$ du carré orange
b. l'aire $\mathscr{A}_r$ du carré rouge

Solution

a. Dans une réduction de rapport $\frac{1}{4}$,
l'aire est multipliée par $\left(\frac{1}{4}\right)^2$.

$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ donc $\mathscr{A}_o = \frac{1}{16} \times \mathscr{A}_b$.

$\frac{1}{16} \times 80 = 5$.

Donc $\mathscr{A}_o = 5 \text{ cm}^2$.

b. Dans un agrandissement de rapport $\frac{3}{2}$,
l'aire est multipliée par $\left(\frac{3}{2}\right)^2$.

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ donc $\mathscr{A}_r = \frac{9}{4} \times \mathscr{A}_b$.

$\frac{9}{4} \times 80 = 180$.

Donc $\mathscr{A}_r = 180 \text{ cm}^2$.

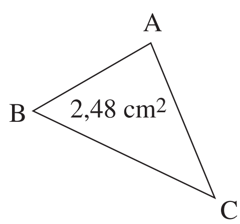
Commentaires

- $\frac{1}{4} < 1$, ce qui correspond bien à une réduction.
- On utilise le résultat du cours.

Spécial prof
On pourra faire interpréter la démarche utilisée dans la première partie de la solution en utilisant des expressions comme « côtés quatre fois plus petits », « aire seize fois plus petite ».

- $\frac{3}{2} > 1$, ce qui correspond bien à un agrandissement.
- On utilise le résultat du cours.

12 Mélanie a construit à l'aide d'un logiciel de géométrie un triangle ABC tel que $AB = 2$ cm , $AC = 2{,}5$ cm et $BC = 3$ cm . Elle a ensuite fait afficher l'aire de ce triangle.



1. Construire un triangle EFG qui soit un agrandissement de rapport 1,4 de ABC.

2. Calculer l'aire de EFG (arrondie au mm²).

13 **1.** Recopier et compléter :
1 cm² est l'aire d'un … de … cm de côté.

2. Expliquer pourquoi 1 cm² est égal à 100 mm².

14 Un architecte réalise une maquette à l'échelle 1/100 d'un de ses projets d'immeuble.
Par combien est divisée l'aire réelle du toit ?

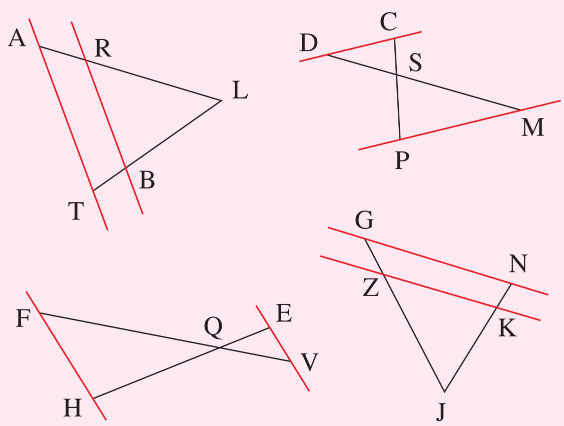
15 Lors de la rénovation d'un bâtiment, on double les dimensions d'une baie vitrée.
Est-il vrai qu'il faudra deux fois plus de verre pour réaliser la nouvelle baie vitrée ?
Pourquoi ?

16 Deux plats à tarte circulaires et de même hauteur ont pour diamètres respectifs 20 cm et 30 cm.
Maïté utilise le premier pour 4 personnes.
À combien de personnes correspond le deuxième ?

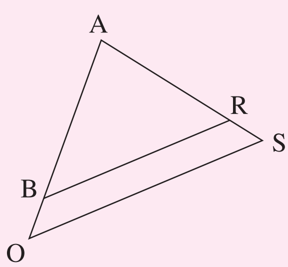
Exercices

faire le point en classe

17 Dans les figures ci-dessous, les droites rouges sont parallèles.
Écrire les égalités de quotients obtenues en utilisant le théorème de Thalès.

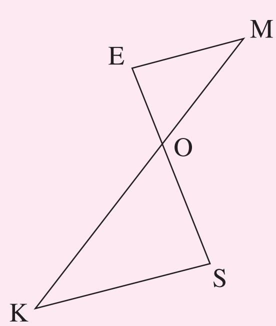


18 Dans la figure ci-contre, les droites (RB) et (SO) sont parallèles,
AB = 4 cm
et AO = 5 cm .



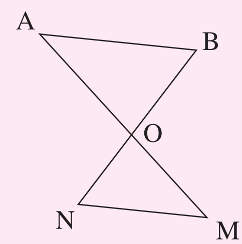
1. On donne :
RB = 4,8 cm .
a. Quelle longueur peut-on alors calculer ?
b. Effectuer ce calcul.
2. On donne AS = 4,5 cm .
a. Quelle longueur peut-on alors calculer ?
b. Effectuer ce calcul.

19 Dans la figure ci-contre, les droites (EM) et (KS) sont parallèles,
EM = 2,8 cm
et KS = 4,2 cm .



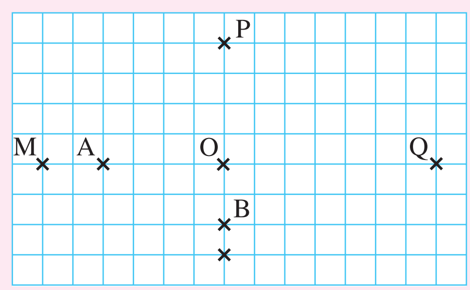
1. On donne :
OS = 3 cm .
a. Quelle longueur peut-on alors calculer ?
b. Effectuer ce calcul.
2. On donne OM = 3,2 cm .
a. Quelle longueur peut-on alors calculer ?
b. Effectuer ce calcul.

20 **1.** Dans une figure du même type que celle ci-contre, on donne :
OM = 5,5 cm ,
ON = 3,5 cm ,
OB = 8,4 cm
et OA = 13,2 cm .

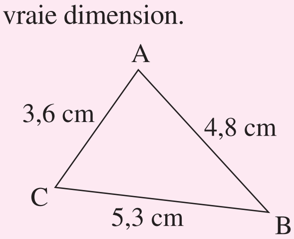


Est-on sûr que les droites (AB) et (MN) sont parallèles ? Pourquoi ?
2. Même question avec :
OA = 14,7 cm , OB = 8,4 cm , ON = 3,5 cm et OM = 6,3 cm .

21 Kévin prétend que dans la figure ci-dessous, les droites (AB), (MN) et (PQ) sont parallèles. A-t-il raison ? Pourquoi ?



22 **1.** Construire le triangle ABC représenté ci-dessous en vraie dimension.



2. En utilisant uniquement une règle graduée, tracer une réduction du triangle ABC dans le rapport $\frac{5}{6}$.

23 **1.** Quel rapport d'agrandissement permet de multiplier l'aire d'une figure par :
a. 16 ? **b.** 25 ? **c.** 100 ?
2. Quel rapport de réduction permet de diviser l'aire d'une figure par :
a. 49 ? **b.** 36 ? **c.** 144 ?

Calcul mental

24 Dans les figures suivantes, les droites rouges sont parallèles. Calculer x.

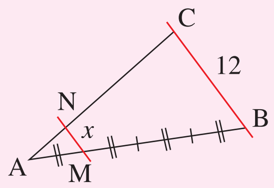


fig. 1

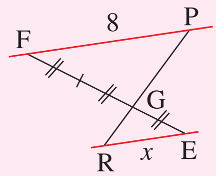


fig. 2

25 Dans les figures suivantes, trouver x de telle manière que les droites vertes soient parallèles.

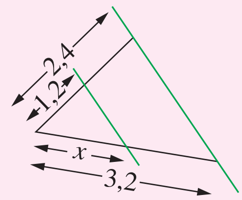


fig. 1

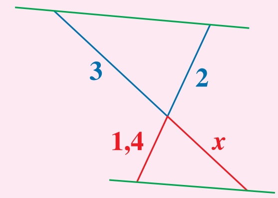
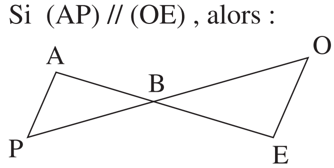
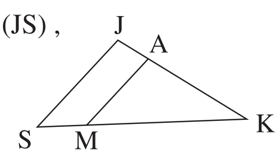
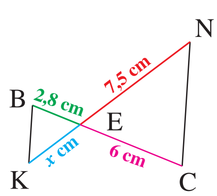
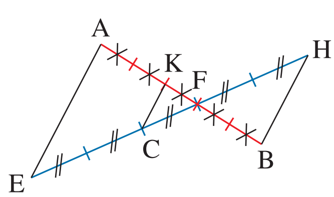


fig. 2

j'évalue mes capacités

QCM

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s).

	a.	b.	c.
26 Si (AP) // (OE) , alors : 	**a.** $\frac{BE}{BA} = \frac{AP}{OE}$	**b.** $\frac{BE}{BA} = \frac{AE}{OP}$	**c.** $\frac{BE}{BA} = \frac{BO}{BP}$
27 Si dans l'exercice **26**, BA = 6 cm , BE = 10 cm et BP = 9 cm , alors :	**a.** BO = 12 cm	**b.** BO = 15 cm	**c.** BO = 18 cm
28 Si (AM) // (JS) , alors : 	**a.** $\frac{KS}{KM} = \frac{KJ}{KA}$	**b.** $\frac{SJ}{MA} = \frac{AJ}{MS}$	**c.** $\frac{SJ}{MA} = \frac{KS}{KM}$
29 Quelle valeur de x rend les droites (BK) et (NC) parallèles ? 	**a.** $x = 3,4$	**b.** $x = 3,5$	**c.** $x = 3,6$
30 Dans cette figure : 	**a.** le triangle FKC est une réduction de FBH dans le rapport $\frac{1}{3}$	**b.** le triangle FAE est un agrandissement de FKC dans le rapport 3	**c.** le triangle FAE est un agrandissement de FBH dans le rapport 1,5
31 Lorsqu'on agrandit une figure dans le rapport 5, son aire est multipliée par :	**a.** 5	**b.** 10	**c.** 25

► pour vérifier les résultats, voir page 298

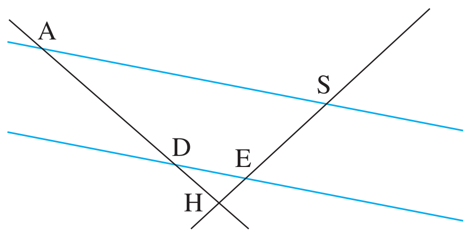
Exercices

je m'entraîne

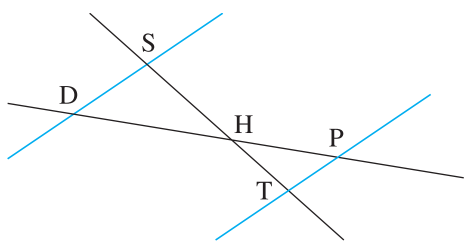
Des égalités de quotients

32 Dans les figures suivantes, les droites bleues sont parallèles.

1. Indiquer deux quotients égaux à $\dfrac{HD}{HA}$.

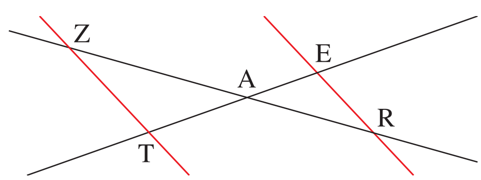


2. Indiquer deux quotients égaux à $\dfrac{PT}{DS}$.

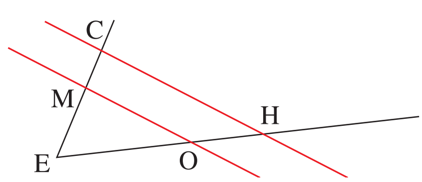


Dans les exercices **33** et **34**, les droites rouges sont parallèles. Écrire des égalités de quotients obtenues en appliquant le théorème de Thalès.

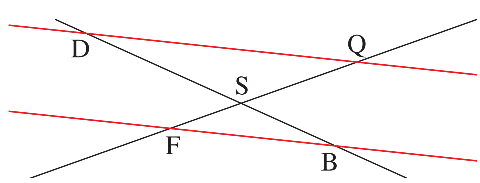
33 **a.**



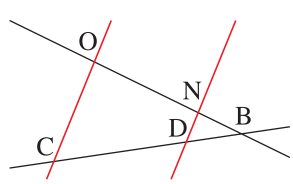
b.



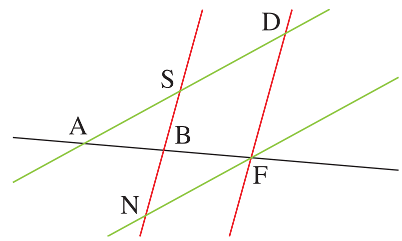
34 **a.**



b.



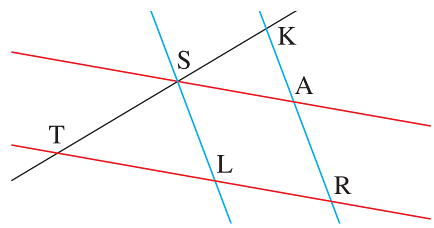
35 Dans la figure ci-dessous, on a : (SB) // (DF) et (AS) // (NF) .



1. Indiquer deux quotients égaux à $\dfrac{BA}{BF}$.

2. Indiquer d'autres égalités de quotients.

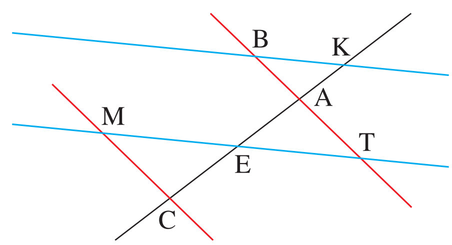
36 Dans la figure ci-dessous, on a : (SL) // (KR) et (AS) // (RT) .



1. Indiquer deux quotients égaux à $\dfrac{KS}{KT}$.

2. Indiquer d'autres égalités de quotients.

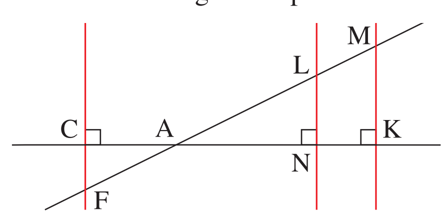
37 Dans la figure ci-dessous, on a : (MC) // (BT) et (BK) // (MT) .



1. Indiquer deux quotients égaux à $\dfrac{EM}{ET}$.

2. Indiquer d'autres égalités de quotients.

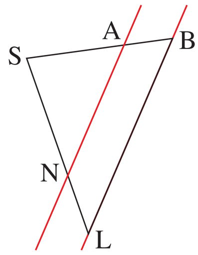
38 **1.** En utilisant le codage de la figure, expliquer pourquoi les droites rouges sont parallèles.



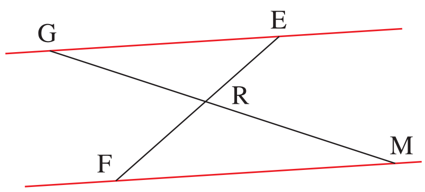
2. Compléter de deux manières différentes la série d'égalités $\dfrac{AL}{\dots} = \dfrac{\dots}{\dots} = \dfrac{\dots}{\dots}$.

Utiliser le théorème de Thalès

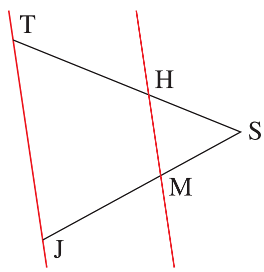
39 Dans la figure ci-contre, (AN) // (BL) , SA = 2,2 cm , SN = 2,8 cm , BL = 4,8 cm et SB = 3,3 cm . Calculer AN et SL.



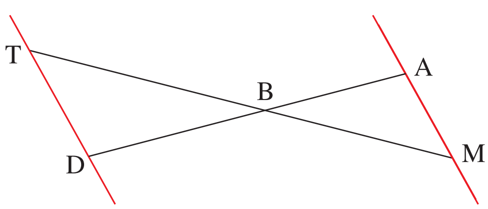
40 Dans la figure ci-dessous, (GE) // (FM) , RG = 2,5 cm , RF = 1,8 cm , RM = 3 cm et GE = 3,5 cm . Calculer RE et FM.



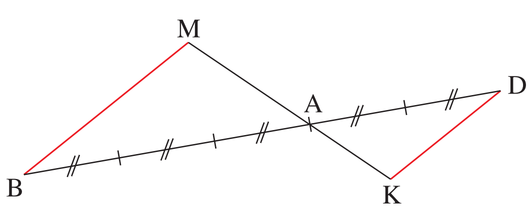
41 Dans la figure ci-contre, (HM) // (TJ) , HM = 2 cm , SH = 2,4 cm , ST = 6 cm et SJ = 5,5 cm . Calculer TJ, SM puis MJ.



42 Dans la figure suivante, (TD) // (AM) , BD = 3 cm , AD = 5,4 cm , BM = 4 cm et TD = 2 cm . Calculer AB, AM et TM.



43 Dans la figure suivante, (MB) // (DK) , MB = 18,9 cm et AK = 8,6 cm .

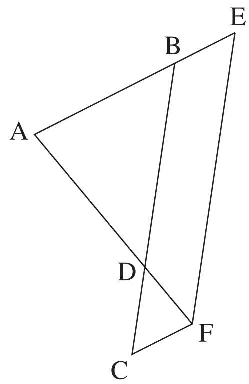


1. À l'aide du codage, déterminer le quotient $\frac{AD}{AB}$.

2. Calculer KD, AM puis MK.

Parallélisme

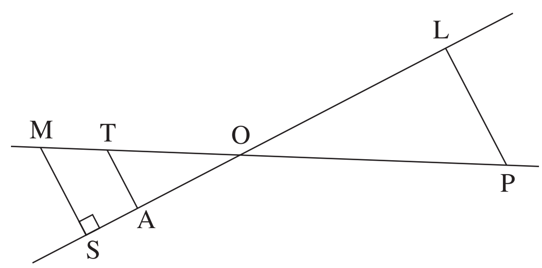
44 Dans la figure suivante, on donne : AB = 3,2 cm , AD = 3,5 cm , BD = 4,2 cm , DC = 1,8 cm , DF = 1,5 cm et AE = 4,6 cm .



1. Les droites (AB) et (CF) sont-elles parallèles ?

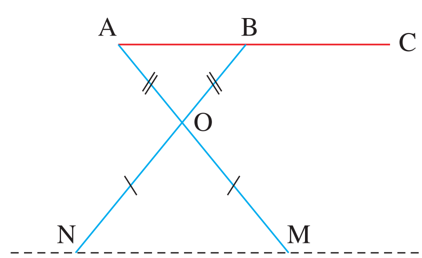
2. Les droites (BD) et (EF) sont-elles parallèles ?

45 Dans la figure suivante, on donne : OM = 4,5 cm , OT = 3 cm , OP = 6 cm , OS = 3,9 cm , OA = 2,6 cm et OL = 5,1 cm .



Indiquer si les triangles OTA et OLP sont rectangles.

46 Une table à repasser peut être schématisée par la figure ci-dessous. Le point B peut coulisser sous le plateau [AB] pour régler la hauteur.



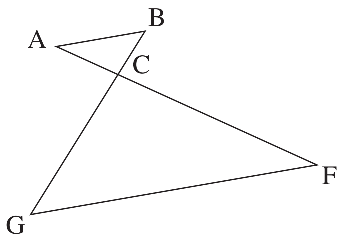
Expliquer pourquoi, si [MN] est horizontal, il en est de même pour [AC].

Exercices

j'approfondis

47 D'après brevet

La figure ci-dessous n'est pas réalisée en vraie grandeur et n'est pas à reproduire.
Les points A, C et F sont alignés ainsi que les points B, C et G.
Les droites (AB) et (GF) sont parallèles.
AB = 3 cm , FC = 8,4 cm et FG = 11,2 cm .

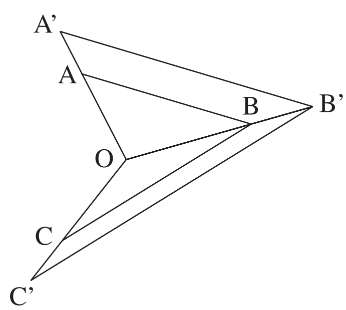


1. Calculer la longueur CA.

2. Soit D le point du segment [CF] et E le point du segment [GF] tels que :
FD = 6,3 cm et FE = 8,4 cm .
Montrer que les droites (GC) et (ED) sont parallèles.

48 D'après brevet

Les points O, A et A' sont alignés, de même que les points O, B et B' ainsi que les points O, C et C'.
On donne :
(AB) // (A'B') ,
(BC) // (B'C') ,
OB = 4 cm ,
OB' = 6 cm ,
OA = 3 cm et
OC' = 4,8 cm .



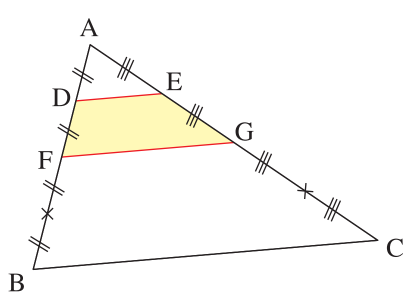
1. Calculer OC.

2. Calculer OA'.

3. Démontrer que (AC) et (A'C') sont parallèles.

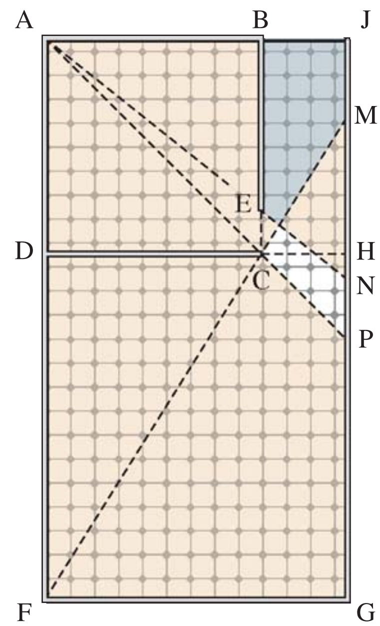
49 Prendre des initiatives

Dans la figure suivante, l'aire du trapèze jaune est 12 cm^2. Quelle est l'aire du triangle ABC ?



50 Maths et physique

L'appartement de Marinette se compose d'une chambre carrée ABCD à laquelle on accède par la porte [EC], d'un couloir BJHC et d'un séjour-cuisine DHGF tous deux rectangulaires.
Marinette remarque que lorsque les deux lampes fixées à la verticale de A et de F sont allumées, le sol est éclairé de différentes façons schématisées ci-dessous.



1. Expliquer les différentes nuances d'éclairage.

Pour simplifier la suite de l'exercice, on considérera que tous les points sont dans un même plan horizontal.

2. On donne :
AB = AD = 3,50 m , CH = 1,40 m , EC = 0,70 m et DF = 5,60 m .

a. Calculer MH puis HP et en déduire MP. ▼

b. Calculer JN puis JP et en déduire NP. ▼

c. En déduire les longueurs MN et HN.

► je trouve de l'aide page 291

51

Il faut exactement 1,5 kg de peinture pour couvrir un panneau de bois.

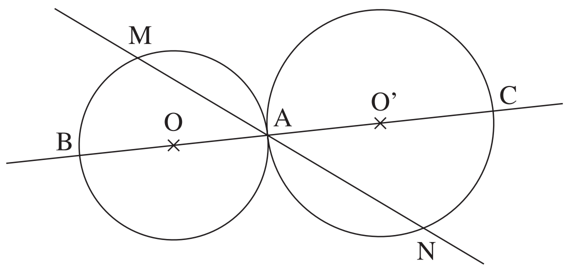
1. Combien faut-il de peinture pour couvrir un nouveau panneau qui est un agrandissement du premier dans le rapport 2,5 ?

2. La peinture est vendue en pots de 2 kg.
Combien faut-il acheter de pots pour couvrir :
a. le premier panneau ? **b.** le deuxième panneau ?

3. Le nombre de pots est-il proportionnel à l'aire de la surface à peindre ?

52 Dans la figure suivante, on donne $BC = 11$ cm et $BA = 5$ cm. Les deux cercles ont pour diamètres [BA] et [AC] et pour centres O et O'.
On donne AM = 4 cm et les points M, A, N sont alignés.

1. Construire cette figure et tracer les droites (MB) et (NC).



2. a. Que constate-t-on pour les droites (MB) et (NC) ?
b. Prouver que ce résultat est vrai. ▼

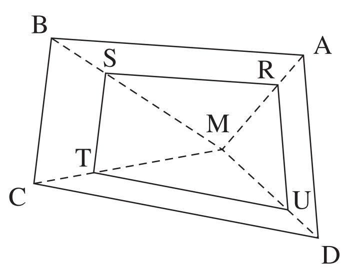
3. Calculer AN.

4. Prouver que les droites (MO) et (NO') sont parallèles.

▶ je trouve de l'aide page 291

53 **Une réduction**

1. a. Construire un quadrilatère ABCD et placer un point M à l'intérieur comme dans la figure ci-dessous.



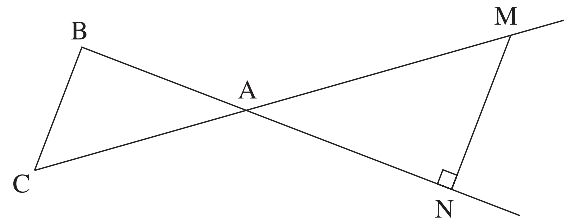
b. Joindre M à chacun des sommets A, B, C et D. Choisir un point R sur [MA].
Construire les points S, T et U comme ci-dessus de telle manière que :
(RS) // (AB), (ST) // (BC) et (TU) // (CD).

2. a. Tracer la droite (RU).
Quelle conjecture peut-on émettre pour les droites (RU) et (AD) ?
b. Prouver que ce résultat est vrai. ▼

3. On suppose pour cette question que $\dfrac{MR}{MA} = \dfrac{2}{3}$ et que le quadrilatère ABCD a pour aire 81 cm^2.
a. Prouver que le triangle RSTU est une réduction de ABCD. Préciser le rapport de la réduction.
b. Calculer l'aire du quadrilatère RSTU.

▶ je trouve de l'aide page 291

54 **1.** Construire une figure comme celle ci-dessous telle que $AB = 4{,}8$ cm, $BC = 3{,}6$ cm, $AC = 6$ cm et $AM = 7{,}5$ cm.

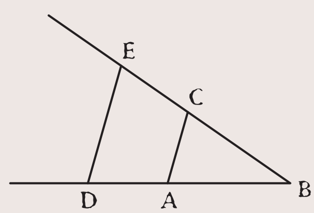


2. a. Quelle est la nature précise du triangle ABC ? Le prouver.
b. Qu'en déduit-on pour les droites (CB) et (MN) ?

3. a. Calculer AN.
b. Qu'en déduit-on pour le triangle ACN ?

55 **Opérer avec Descartes**

Le texte ci-dessous, dont l'auteur est René Descartes, date du XVII^e siècle.



Soit, par exemple AB l'unité, & qu'il faille multiplier BD par BC, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer DE parallele a CA, & BE eſt le produit de cete Multiplication.
Ou bien s'il faut diviser BE par BD, ayant ioint les poins E & D, ie tire AC parallele a DE, & BC eſt le produit de cete division.

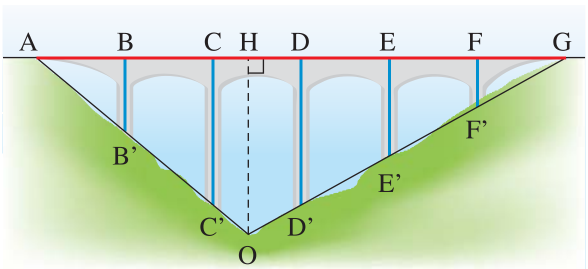
Pour la suite de l'exercice, on prend $AB = 1$ dm.

1. a. Dans le premier paragraphe, expliquer pourquoi $BE = BD \times BC$.
b. Utiliser la méthode de Descartes pour obtenir un segment de longueur $1{,}2 \times 0{,}65$ dm.
c. Mesurer sur la figure la valeur de ce produit.

2. a. Dans le deuxième paragraphe, quel mot devrait-on utiliser à la place de « produit » dans le langage actuel ?
b. Expliquer pourquoi $BC = \dfrac{BE}{BD}$.
c. Utiliser la méthode de Descartes pour obtenir un segment de longueur $\dfrac{0{,}66}{1{,}2}$ dm.
d. Mesurer sur la figure la valeur de ce quotient.

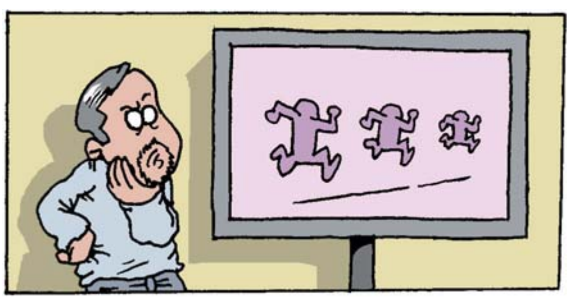
56 Construire sur une même figure trois carrés de côté 4,2 cm : ABCD, BEFC et EGHF.
Soit M le point d'intersection des droites (DG) et (BC) et N le point d'intersection des droites (DE) et (BC). Calculer la longueur MN.

57 La figure ci-dessous schématise un pont horizontal [AG] (en rouge) soutenu par cinq piles verticales (bleues) qu'on envisage de construire au-dessus d'une vallée de profondeur HO.

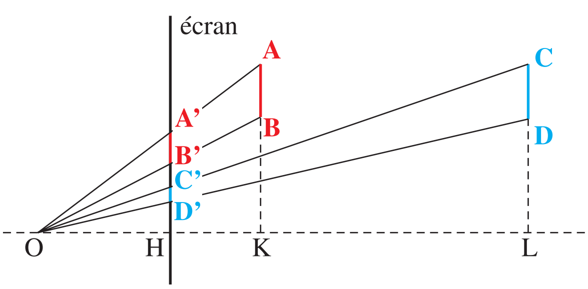


On donne :
$AH = 120$ m , $HO = 100$ m ,
$AB = BC = CD = DE = EF = FG = 50$ m .
Calculer la hauteur de chaque pile (arrondie au m).

58 **Infographie**



Les concepteurs de jeux vidéo sont confrontés au problème de la perspective. Lorsqu'un personnage s'éloigne, son image devient plus petite.
On a schématisé ci-dessous en coupe ce phénomène : l'écran est représenté en noir ; le personnage est représenté par des segments superposables [AB] puis [CD] et son image sur l'écran par [A'B'] puis [C'D'] ; les droites (AK) et (CL) sont parallèles à l'écran.



1. Prouver que $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{OH}{OK}$ puis que $\dfrac{C'D'}{CD} = \dfrac{OH}{OL}$.

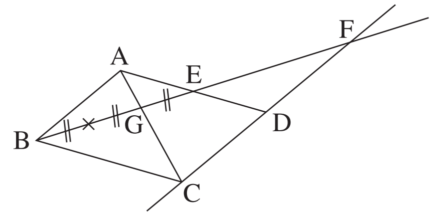
2. En déduire que $A'B' \times OK = C'D' \times OL$.

3. Comparer A'B' et C'D' si :

a. $OL = 2 \times OK$

b. $OL = 3 \times OK$

59 Dans la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme.



1. En utilisant le codage, déterminer $\dfrac{AE}{BC}$ et expliquer comment on peut en déduire que E est le milieu de [AD].

2. Démontrer ensuite que D est le milieu de [FC].

60 **Racine et agrandissement**

1. Construire un carré MNPQ et le découper en quatre triangles rectangles isocèles comme dans la figure 1. Disposer ensuite les quatre triangles comme indiqué dans la figure 2.

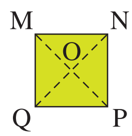


fig. 1

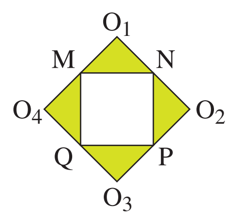


fig. 2

On admet pour la suite que dans la figure 2, on obtient ainsi deux carrés $O_1O_2O_3O_4$ et MNPQ.

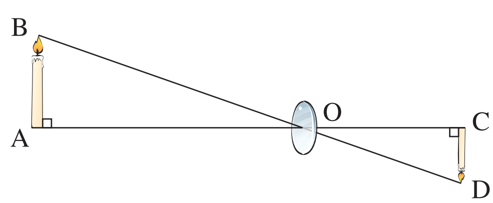
2. Donner sans calcul le rapport $\dfrac{\text{aire de } O_1O_2O_3O_4}{\text{aire de MNPQ}}$.

3. En déduire sans calcul le nombre k tel que : $O_1O_2 = k\,MN$.

► je trouve de l'aide page 291

61 **Maths et physique**

En optique, une lentille convergente placée en O donne d'un objet [AB] une image renversée [CD].
On représente la situation par le schéma ci-dessous.
On donne :
$AB = 60$ cm , $OA = 2{,}10$ m et $OC = 70$ cm .
Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires à la droite (AC). Les droites (AC) et (BD) se coupent en O.

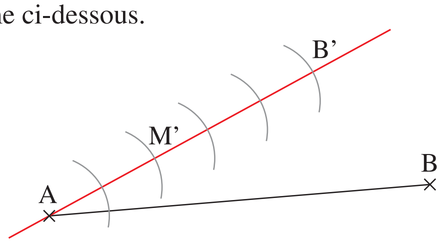


En justifiant, calculer la longueur en centimètres de l'image [CD].

62 Partage de segment

1. a. Tracer un segment [AB].

b. Sur une droite qui passe par A, reporter plusieurs fois au compas la même longueur choisie au hasard comme ci-dessous.



Soit M’ et B’ les points déterminés par le deuxième arc et le cinquième arc.

c. Joindre les points B et B’.
Construire la parallèle à (BB’) passant par M’.
Cette droite coupe la droite (AB) en M.

d. Prouver que $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$.

e. Construire à partir de M un point P sur (AB) qui vérifie lui aussi $\frac{AP}{AB} = \frac{2}{5}$.

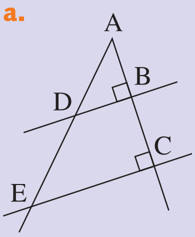
f. Existe-t-il d’autres points sur (AB) qui ont la même propriété que M et P ?

2. Sur une nouvelle figure, tracer un segment [EF]. En s’inspirant de la question **1**, construire les points M et P de la droite (EF) tels que $\frac{EM}{EF} = \frac{EP}{EF} = \frac{3}{7}$.

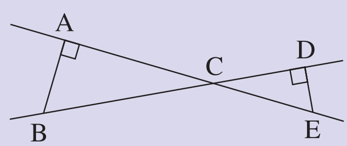
Lire et comprendre

63 Pour chacun des cas suivants, indiquer si l’utilisation du théorème de Thalès est envisageable sans tracés supplémentaires. Expliquer pourquoi.

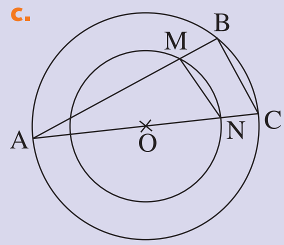
a.



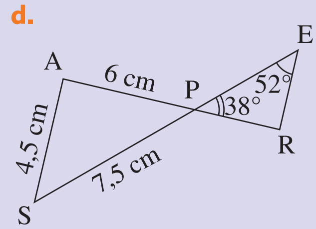
b.



c.



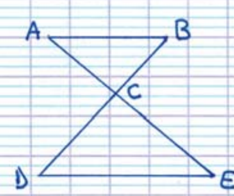
d.



Repérer et corriger les erreurs

64 Voici ce qu’un élève a noté sur son cahier de brouillon pour résumer un problème qu’il doit résoudre.

Données : (AB)//(DE)
AB = 2,4 cm
BC = 1,8 cm
DE = 3,6 cm
CE = 4,8 cm



But : CD = ?

Et voici sa solution.

(AB)//(DE) donc les triangles ABC et CDE sont dans une configuration de Thalès.
D’après le théorème de Thalès, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CD} = \frac{CB}{CE}$.
Donc $\frac{2,4}{3,6} = \frac{3,2}{CD} = \frac{1,8}{CE}$.

$\frac{2,4}{3,6} = \frac{3,2}{CD}$ donne $2,4 \times CD = 3,2 \times 3,6$

$CD = \frac{3,2 \times 3,6}{2,4}$

$CD = 5$ cm

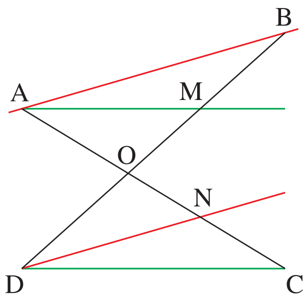
1. Relever les erreurs.

2. Résoudre le problème.

Exercices

Devoirs à la maison

65 Dans la figure ci-contre, les droites (AB) et (DN) sont parallèles, de même que les droites (AM) et (DC).



1. a. Construire une telle figure.

b. Tracer les droites (MN) et (BC). Quelle conjecture peut-on émettre à leur sujet ?

L'objectif de ce qui suit est de prouver le résultat constaté à la question **1b**.

2. Exprimer :

a. le quotient $\dfrac{ON}{OA}$ à l'aide de D, O et B

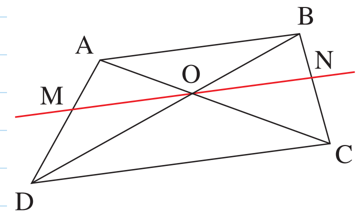
b. le quotient $\dfrac{OM}{OD}$ à l'aide de A, O et C

3. a. À l'aide des produits en croix, montrer que $ON \times OB = OM \times OC$.

b. Conclure.

▶ je trouve de l'aide page 291

66 Soit un trapèze ABCD tel que (AB) // (DC) , OB = 3,8 cm , OA = 3 cm et OD = 5,7 cm . (MN) est la parallèle aux bases qui passe par O.



1. a. Réaliser une telle figure.

b. Que constate-t-on pour les longueurs OM et ON ?

2. L'objectif de cette question est de prouver le résultat constaté à la question **1b**.

a. Calculer OC, puis DB puis CA.

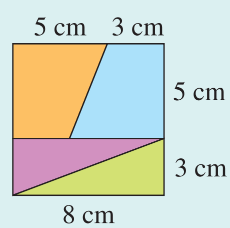
b. À l'aide du théorème de Thalès, calculer $\dfrac{MO}{AB}$, puis $\dfrac{ON}{AB}$.

c. En déduire que ces deux quotients sont égaux puis conclure.

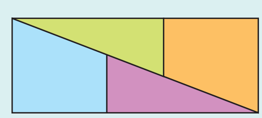
▶ je trouve de l'aide page 291

Casse-tête

67 **1.** Safae a construit un carré de 8 cm de côté puis l'a partagé en deux trapèzes superposables et deux triangles rectangles superposables, qu'elle a coloriés comme ci-contre.
Quelle est l'aire de ce carré ?



2. Elle a ensuite découpé chacun des quatre morceaux et les a assemblés comme ci-contre. « J'obtiens ainsi un rectangle de dimensions 5 cm sur 13 cm, donc d'aire 65 cm^2 ! » a-t-elle déclaré.



Pourquoi est-ce faux ? Expliquer l'origine de son erreur.

Petits exposés

A Historique de Thalès.

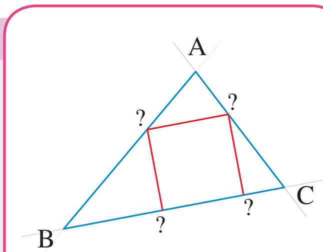
B Des applications du théorème de Thalès dans d'autres disciplines (optique, astronomie, etc.)

NARRATION DE RECHERCHE

Vous raconterez sur votre feuille les différentes étapes de votre recherche, les observations que vous avez pu faire et qui vous ont fait progresser ou changer de méthode. L'évaluation ne portera pas uniquement sur la solution (elle peut être juste, fausse ou incomplète) mais sur votre travail de recherche.

Tracer un triangle ABC.

Construire un carré dont les quatre sommets soient sur les côtés du triangle.



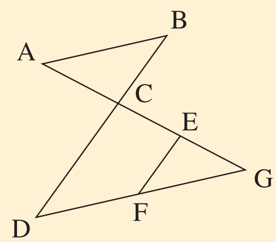
Aide à... la démonstration et au raisonnement

Énoncé

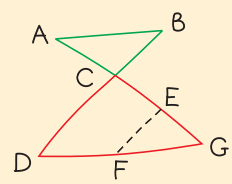
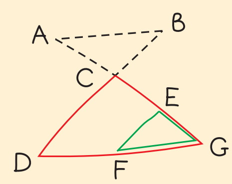
Dans la figure ci-contre, les droites (AB) et (GD) sont parallèles et on donne $AB = 4{,}2$ cm , $AC = 3$ cm , $GD = 6{,}3$ cm , $GF = 2{,}8$ cm et $EG = 2$ cm .

1 Calculer CG.

2 Les droites (EF) et (CD) sont-elles parallèles ?



Recherche

1. Données *(AB) // (GD)* *Des longueurs connues.* ***But*** *Calcul d'une longueur.*	***Bilan*** *On va tenter d'utiliser le théorème de Thalès dans la configuration suivante.*	
2. Données *Des longueurs connues.* ***But*** *Recherche de parallélisme.*	***Bilan*** *On va tenter d'utiliser la réciproque du théorème de Thalès dans la configuration suivante.*	

Au brouillon, on essaie d'identifier le type de problème.

On rédige.

Rédaction

1 Comme les droites (AB) et (DG) sont parallèles, les triangles CAB et CGD sont dans une configuration de Thalès et d'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{CA}{CG} = \dfrac{CB}{CD} = \dfrac{AB}{GD}$, d'où $\dfrac{3}{CG} = \dfrac{CB}{CD} = \dfrac{4{,}2}{6{,}3}$.

$\dfrac{3}{CG} = \dfrac{4{,}2}{6{,}3}$ donne $4{,}2 \times CG = 3 \times 6{,}3$ donc $CG = \dfrac{3 \times 6{,}3}{4{,}2} = 4{,}5$ (en cm).

2 On calcule séparément.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{GE}{GC} = \dfrac{2}{4{,}5} \text{ et } \dfrac{GF}{GD} = \dfrac{2{,}8}{6{,}3} \\ 2 \times 6{,}3 = 12{,}6 \\ 4{,}5 \times 2{,}8 = 12{,}6 \end{array}\right\} \text{ donc } \dfrac{GE}{GC} = \dfrac{GF}{GD} .$$

Comme de plus les points G, E et C d'une part, et G, F et D d'autre part sont alignés dans le même ordre, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EF) et (CD) sont parallèles.